解けること・わかること・面白いと思うこと

－教師の算数・数学理解を深めるための試み－

Improving teachers' understanding of mathmatics

宮崎 剛*

MIYAZAKI Takeshi*

要旨

子どもたちの学ぶ意欲が低下し，学びへの動機づけが弱体化している今日，学びの面白さを伝える教師の力量をいかに充実させるか，ということがますます重要になってきている。算数・数学教育という領域でこの問題を捉え返すとき，次のような数学的経験を積むことの必要性が浮き彫りになる。それは，扱っている題材が仮に子どもを対象とした単純なものであったとしても，それをより高い立場から掘り下げ，再構成し，その多面性や他の様々な題材との関連などを実感する経験である。本研究ノートは，分数の大小比較および負数の乗法という初等教育レベルの題材を取り上げ，それらをいかに数学的に拡げ，深めることがなし得るかを示し，上記の目的に資する一つの試みである。

キーワード；理数科離れ，教師の力量，数学的経験，ファレイ数列，負数の乗法

１．はじめに

(1) 理数科離れの進む現実

昨今の学力低下論のなかで，日本の児童・生徒の理数科離れがたびたび指摘されている。例えば，筒井は，「日本の中学２年生の数学好き嫌いの国際比較においては，『好き』と『大好き』が主要国中最下位であり，しかも，95 年と 99 年の差の比較においては，５ポイントも『嫌い』が増加しています」として「日本の生徒たちは高学年になるにしたがって数学や理科が嫌いになるというデータがある」[1]と述べている。

そもそも学力というものをどのように定義し，その低下をどのような基準で測るのか，といったことに関しても様々な見解がある。それゆえ，どのような立場で論ずるかによって，理数科離れの捉え方にも差異が生ずる。しかし，この言葉で表される問題の存在は疑う余地のないことであろう。

これに対して，様々な理由付けと解決の方向性が提示されている。その代表的なものとして，いわゆるゆとり教育にその原因を帰し，その解決を学習内容の増加と授業時間の確保に求めるものを挙げることができる。今回の学習指導要領の改訂がその方向に沿うものであることは，言うまでもない。

しかし，理数科離れやそれを含む学力低下にとって，学校教育のカリキュラムのあり方はむしろ副次的な要因である。それらを生む主要な根拠は，以下に述べる学校教育の基盤そのものを大きく揺さぶる社会状況にこそある。なぜなら，いま問題となっている学力低下は，ある限られた学習領域における能力の低下といった形で現れているものではなく，子どもたち全体の学習に対する動機付けおよび意欲の低下に起因して現れているものだからである。

こんにちの格差社会の深化のもとで，次のような事態が進行している。この社会の下位層にあっては，学習のみならず，生きていくことそのものへの活力が失われつつある。ここでいう下位層とは，三浦が指摘するように，「『下流』とは，単に所得が低いということではない。コミュニケーション能力，生活能力，働く意欲，学ぶ意欲，消費意欲，つまり総じて人生への意欲が低いのである」[2]といった層を指している。そして，これは社会のなかのごく一部のひとびとに起こっている出来事ではなく，このような層が日本社会のむしろ多数派になりつつある，という時代を迎えているのである。

また，社会の上位層も，学びに向かうことに積極的になれない状況に囲まれている。今後解消される見込みのない就職難の中で，一生懸命努力して学歴をつけたところで，その努力に見合う社会的地位を確保し得るものはほんの一握りの者に限られるという無力感が支配している。仮に一旦そのような地位にありついたとしても，構造的な不況下での企業倒産・リストラなど，一寸先は闇だという厳しい現実が待っている。

子どもたちの意欲が勉強に向かわず，学力が低下してい

＊ 大阪府立池田高等学校

ることの背景にこのような社会状況があることは疑いない。

とりわけ理数科系の勉強には，積み重ねの要素が強く求められ，理解し，使いこなし，面白さを感じることのできるようになるまでに必要な忍耐力が，他の科目に比べてより多く要求される。特に算数・数学は「なんとなくわかっている」という定着度合いのまま積み重ねていくと，理解に破綻をきたす傾向の強い教科である。上に述べたように学習への動機付けが弱体化している中で，特に理数科離れが進行することは，予想に難くない。

以上の様に，学力低下そして理数科離れという問題が，今日の社会状況に根拠を置いて生起していることを見てきた。このように考えると，厳しい社会状況の中で，子どもたちが自分の将来を切り拓く力を身につけられるように支援していくことは，教育現場においてますます重要になってきている。またそれと同時に，学ぶ意欲が低下し，将来の進路を目標とした学習への動機付けが弱くなっているからこそ，学びの面白さそのものを伝え，そこへの興味を引き出していく教師本来の役割が，これまで以上に一層強く求められているとも言えるのである。

このような観点から見ても，ゆとり教育批判から学習指導要領の改訂に至る昨今の流れは，一面的なものと言わざるを得ない。確かに，その中でしばしば指摘される「読み，書き，そろばん」と呼ばれる領域の学力が低下していることは疑いない。そしてその学力を向上させるためには，機械的な反復練習を増やすことも必要なことである。しかし，こうした反復練習はこれらの学習領域の持つ内容上の面白さへの興味を喚起することと合わせて行わないと，無味乾燥な単なる作業に堕してしまう危険も十分に潜んでいる。そうした学びの新たなありようを模索していくことこそが，いま求められているのである。

(2) 算数・数学理解の３つの相

さてこれより，上記の課題について算数・数学教育という領域に絞って論を進めたい。

児童・生徒の算数・数学に対する学習意欲を高めていくためには，その理解の促進が前提になることは言うまでもない。算数・数学理解にはさまざまな位相が存在するものと思われるが，ここではその中でも主要なものである次の３つの相を取り上げる。それは，ある与えられた数学的な題材について，問題を解けるという相，その内容と構造を理解しているという相，およびそれについて面白いと思う相である。それらは相互補完的である場合もあるし，単独で成立し得る場合も少なくない。

それらの相が単独で存在し得る例の一つとして，ワイルズ[3] によって1995年に証明されたフェルマー[4] の最終定理を挙げることができる。それは次のような非常にシンプルなものである。

「n を 3 以上の整数とするとき，
$x^n + y^n = z^n$ を満たす正の整数 x, y, z は存在しない。」

この定理の述べている内容は中学生でも理解できるであろう。また，「n を 3 以上の整数とする」という条件を「$n = 2$」へと変更すると，与式は三平方の定理そのものになる。これを満たす正の整数 x, y, z はピタゴラス数と呼ばれるものであり，無数に存在することもよく知られている。ところが，３以上のものであれば，どんな整数 n に対しても，そのような x, y, z が存在しなくなるのである。これは，その身近さと不思議さとから大変興味のわく題材である。

しかし，この定理は見かけのシンプルさとは裏腹に，その証明には非常に高度な数学が必要となる。そのため，これまで幾多の数学者がその証明に挑みながら完成に至ることができず，フェルマーがノートの端にメモを残してから，約 360 年後の 1995 年にやっと完全な証明が得られた。しかし，それが本当に証明たり得ていることを理解できる人はそれほど多くはない，と言われている。

このように算数・数学の世界には，その問題に対する完全な理解を得られていなくとも，あるいはそれを解くことができなくとも，面白いと感じ，興味を持つことのできる題材がたくさんあるのである。

また，与えられた問題を解けるということと，その問題に関連する数学的な内容と構造を理解しているということは次元の異なることである。「与えられた問題の解き方を知っているが，なぜそのようにすればよいかについて，実はきちんと理解していない」ということは，児童・生徒・学生のみならず教師にも往々にして見られることである。

先に述べた３相が相補って満足されている状態が理想なのであろうが，それは難しいことである。これまでの学校教育の中では，まず「問題を解けること」を要求されるのが実情である。なぜなら，テスト形式で確かめられる学力としては，それが最も測りやすいものだからである。

しかし，子どもの算数・数学に対する興味・関心や，学習に積極的に向かう意欲は，「問題を解ける」という相のみならず，３つの相のそれぞれから，様々な契機を持って生まれるものである。そこへ注目していくことが，学びの新たなありようの一つになるのではなかろうか。

(3) 教師にとっての数学的経験

そのためには, 教師がこの３つの相に対応した様々な「引き出し」を増やしていく努力が必要である。より根本的には教師自身が算数・数学を学ぶなかでその数学的理解を広げ，深めるとともに，面白い，楽しいと感じながら学ぶ経験を積むことが欠かせない。問題の解き方をよく知っているが，その人自身が算数や数学を学ぶことに喜びを見出していない教師から，問題の巧みな解法をどれほど教わったとしても，子どもの中に学ぶ喜びが育まれるだろうか。

もちろん，教師が学んだ内容をそのまま子どもに教えることができない場合も多い。しかし，仮に小学校の算数で扱う初等的な事柄であっても，それを様々な題材と関連づけ，その数学的構造を理解した上で，どのように３つの相に対応した「引き出し」に整理していくか，ということが大切なことである。そのような準備を経るか否かで，その事柄に対する子どもの興味や理解の度合いは大きく変わってくるはずである。

このような方向性で教師自身の能力開発が要求されていると立論するとき，次の点に是非注目しなければならない。

現在小学校など初等教育に携わっている若い教師たち，あるいはそれを目指そうとする学生たちの中に，自分自身算数・数学が好きでない，得意でない，苦手である，といった意識をもった人が少なからず含まれている，という現実がある。このことは，「東大や京大の理系の学生ですら，学力低下が深刻で（中略）京大生については 1999 年 1 月 19 日の『京都新聞』に，理学部，教育学部の１年生の８割が，理解困難な科目を持っているとの調査結果が報告されています」[5] という日本の現状からすれば，止むを得ないことなのかもしれない。

いわゆる団塊世代の教師の退職により，いま新規教員の大量採用期を迎えており，その中にはここで指摘したような教師が相当数含まれているであろうことは，想像に難くない。

(4) 本研究ノートの位置

本研究ノートは，小学校や中学校で教える算数・数学の中から２つの題材を取り上げて，それが初等的なものであっても数学的に深めることが可能であることを示すものである。

最初に取りあげたのは，分数の大小比較に関連するものである。ある規則を設けて規約分数を大きさの順に並べてみると，そこに面白い性質が浮かび上がってくる。いわゆるファレイ数列として知られたこの性質は，小学校で習う分数の通分の知識さえあれば，理解することができる。しかし，その性質は連分数に連なる数学的な構造を持っている。もし，この性質の成り立つ証明にまったく触れなくても，整数や有理数をはじめ，数の持つ不思議な，魅力を提示することができるだろう。その意味でこの題材は，数学的な興味・関心が数学の内容の理解とは別に成立することを示す具体例として挙げたものである。

次に取り上げたのが，負数と負数の積が正数になることにまつわる話題である。これは，中学１年生の数学に登場するテーマである。教師の中で $(-1)\times(-1)=1$ という計算のできない人がいるとは考えにくいが，その理由をわかりやすく説明することは，それほど容易なことではない。つまり，この題材は「問題を解ける」ということと，「数学を理解している」ということとの間には大きなギャップがあることを示す好例になっている。また，ある数学的題材を「説明する」といったときに，その説明が指しているものとは，証明のことなのか，またそれとは別の数学的な構造のことなのか，こういったことについても考察することができる。加えてこの題材を複素数平面上での２数の積という，少し高い立場から再構成することによって，いっそう理解を深めることができることを示したい。

ここで取り上げた２つの話題は，数学的にはよく知られたものである。しかし，これらを取り上げることによって，初等教育で算数や数学を教えることにまだ自信を持ち得ない若い教師たちが，このような簡単な題材でも数学的に広げ，深めることができ，その学びの中に驚きや感動を見出し得るという経験を積む一助となればと，この研究ノートをまとめることとした。

実際に，このノートをベースに，教師志望の学生を対象に 90 分程度のセミナーを持つ機会を得た。本ノートの最後に，その時の様子を簡単に報告することとする。

２．ファレイ数列について

完全にその数学的内容を理解していなくても，興味深く，面白いと感じることのできる題材として，ファレイ数列を挙げることができる。これは，次のような内容である。

(1) ファレイ数列の定義

分母を k とし，区間 $[0,1]$ に含まれる既約分数を大きさの順に並べた数列を Q_k とする。Q_1 から Q_n までに含まれる既約分数をすべて大きさの順に並べた数列を F_n とかき，これをファレイ数列 F_n と呼ぶ。言うまでもなく，k,n は自然数である。具体的には，例えば

F_3 は　$\frac{0}{1},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{1}$ であり，

Q_4 は　$\frac{1}{4},\frac{3}{4}$ （$\frac{2}{4}$ は既約分数ではないので含まれない）

だから，

F_4 は，$\frac{0}{1},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{1}{1}$ となる。

n が小さいうちは，与えられた F_n に対し，Q_{n+1} を差し込んで F_{n+1} を作ることは容易だが，n が大きくなるにつれて，Q_{n+1} の要素 $\frac{x}{y}\,(y=n+1)$ をどこに差し込めばよいのか，を探すのは難しくなる。言い換えれば F_n に含まれる隣り合う既約分数 $\frac{c}{d}$，$\frac{a}{b}$ （ただし，$\frac{c}{d}<\frac{a}{b}$）の中で，$\frac{c}{d}<\frac{x}{y}<\frac{a}{b}$ を満たすものを見つけるのは容易ではなくなってくる。というのも，$\frac{x}{y}$ の入る「正しい位置」を決めるた

めには，F_n で隣り合っている２つの既約分数 $\frac{c}{d}$，$\frac{a}{b}$ におおよその見当をつけ，２つの不等式 $\frac{c}{d}<\frac{x}{y}$ ，$\frac{x}{y}<\frac{a}{b}$ が成立することを確認しなければならないからである。不運にもこの見当が外れた場合には，また別の２つの既約分数に対して同じことを繰り返し行い，「正しい位置」を決めなければならない。

しかし実は，与えられた F_n に対し，Q_{n+1} を差し込んで F_{n+1} を作るには，いま述べた方法に比べずっと簡単な方法がある。そのために，ファレイ数列に関してよく知られた性質をここに紹介する。（証明は後述することにする。）

Q_{n+1} のどんな要素 $\frac{x}{y}$ が与えられても，F_n において隣り合う既約分数 $\frac{c}{d}$，$\frac{a}{b}$ が必ず存在して次の２式を満たしている。

$$\frac{c}{d}<\frac{x}{y}<\frac{a}{b} \quad , \quad \frac{x}{y}=\frac{c+a}{d+b}$$

このようにして，F_n に Q_{n+1} の要素を加えて F_{n+1} を作ると F_{n+1} 上で Q_{n+1} の要素が隣り合うことは決してない。

以上の性質にもとづけば，与えられた F_n に対し，F_{n+1} を作るには，Q_{n+1} の要素 $\frac{x}{y}$ に対して，F_n の中から $\frac{x}{y}=\frac{c+a}{d+b}$ を満たす隣り合わせの既約分数 $\frac{c}{d}$，$\frac{a}{b}$ を探し，その２数の間に $\frac{x}{y}$ を差し込めばよい。これはいともたやすい作業である。

例えば F_7 が与えられたとしよう。F_7 を書き下すと，

$$\frac{0}{1},\frac{1}{7},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{2}{7},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{1}{2},\frac{4}{7},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7},\frac{1}{1}$$

となる。ここへ Q_8 を差し込んで F_8 を作るには，次のようにすればよい。例えば Q_8 の要素 $\frac{3}{8}$ の入る「正しい位置」は $\frac{3}{8}=\frac{c+a}{d+b}$ となる $\frac{c}{d},\frac{a}{b}$ を F_7 から探すと，$\frac{c}{d}=\frac{1}{3}$ ，$\frac{a}{b}=\frac{2}{5}$ であることから，$\frac{1}{3}<\frac{3}{8}<\frac{2}{5}$ であるとすぐに見つかるのである。全く同様にして，F_8 が次のように完成する。

$$\frac{0}{1},\frac{1}{8},\frac{1}{7},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{2}{7},\frac{1}{3},\frac{3}{8},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{1}{2},$$
$$\frac{4}{7},\frac{3}{5},\frac{5}{8},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7},\frac{7}{8},\frac{1}{1}$$

以上がファレイ数列の概要である。このような規則性があることを知らぬまま，分数の大小比較という作業をいちいち行うことによってこの数列を作る大変さを感じていればいるほど，「種明かし」をしたときの驚きは大きい。なぜそのようになるか，その理由を知らなくとも適当な大きさの n まで F_n を作ってみると，その不思議な性質，ひいては「数」の持つ魅力への興味が湧いてくる。また，もしかすると大小比較の中で，F_n において隣り合わせている２つの分数 $\frac{c}{d}$，$\frac{a}{b}$ について，必ず $ad-bc=1$ が成立していることに気づくかもしれない。これは $\frac{c}{d}$，$\frac{a}{b}$ がそれぞれ既約分数であることの十分条件なのだが，（なぜなら，例えば $\frac{a}{b}$ が可約であれば，$ad-bc$ は，a,b の公約数でくくることができ，$ad-bc$ の値はその公約数の倍数となり，1 になることはありえないから）ファレイ数列であるための必要条件にもなっているのである。この点については，後に詳しく触れる。

(2) ファレイ数列の性質の証明

証明抜きで事実を知るだけでも興味深いが，ここでは前述の性質についての証明を与えておく。

証明すべきは，次の命題である。

「ファレイ数列 F_n が与えられたとき，$b+d=n+1$ を満たす隣り合わせの既約分数 $\frac{c}{d}$，$\frac{a}{b}$ の間に $\frac{c+a}{d+b}$ を挿入すれば，ファレイ数列 F_{n+1} を得る」（＊）

これを示すために，まず次の（補題１）を示す。

（補題１）

「$\frac{c}{d}<\frac{a}{b}$ に対し $ad-bc=1$ が成り立てば，$\frac{c}{d}<\frac{p}{q}<\frac{a}{b}$ を満たす $\frac{p}{q}$ のうち分母の最も小さいものは $\frac{c+a}{d+b}$ である。」

＜証明＞

$\frac{c}{d}<\frac{p}{q}<\frac{a}{b}$ を満たす a,b,c,d,p,q に対し

$$\begin{cases} u=-bp+aq \\ v=dp-cq \end{cases} \quad \text{つまり} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -b & a \\ d & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$ とおく。

これを逆に解くと，$ad-bc=1$ だから

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} cu+av \\ du+bv \end{pmatrix}$$ となる。

ここで，$\frac{c}{d}<\frac{p}{q}<\frac{a}{b}$ より

$u=-bp+aq>0$，$v=dp-cq>0$ だが，u,v は整数だから，$u\geq 1, v\geq 1$ となる。

よって $q=du+bv\geq b+d$ が成り立つから

$\dfrac{c}{d}<\dfrac{p}{q}<\dfrac{a}{b}$ を満たす $\dfrac{p}{q}$ のうち分母が最も小さくなるのは，$u=1, v=1$ のときであり，$p=c+a$，$q=d+b$ となる。(終)

次にこの（補題１）を用いてもう一つの補題の成り立つことを示す。

（補題２）

「$ad-bc=1$ であれば，２つの既約分数 $\dfrac{c}{d}, \dfrac{a}{b}$ はその２つをはじめて揃って含むファレイ数列 F_n で隣り合わせになる。」

＜証明＞

$ad-bc=1$ だから $\dfrac{c}{d}<\dfrac{a}{b}$ である。また，もし $\dfrac{c}{d}<\dfrac{p}{q}<\dfrac{a}{b}$ を満たす $\dfrac{p}{q}\in F_n$ が存在したとすると，（補題１）より，$q\geq b+d$ でなければならない。ところが，$\dfrac{c}{d}, \dfrac{a}{b}$ の少なくともいずれかは Q_n に属するから，$b=n$ か $d=n$ のどちらかが成り立ち，b, d ともに正の整数だから，$b+d\geq n+1$ となる。よって，$q\geq n+1$ となるが，これは $\dfrac{p}{q}\in F_n$ と矛盾する。つまり，$\dfrac{c}{d}<\dfrac{p}{q}<\dfrac{a}{b}$ を満たす $\dfrac{p}{q}\in F_n$ は存在せず，$\dfrac{c}{d}, \dfrac{a}{b}$ は隣り合わせになる。(終)

最後に，証明したい命題（＊）を以下の手順で示す。
①最初に

「２つの既約分数 $\dfrac{c}{d}, \dfrac{a}{b}$ ($\dfrac{c}{d}<\dfrac{a}{b}$ とする) が F_n で隣り合わせている ⇒ $ad-bc=1$」（＊＊）が成立するならば，Q_{n+1} の要素 $\dfrac{x}{y}$（ただし $y=n+1$）と F_n の隣り合う２つの要素 $\dfrac{c}{d}, \dfrac{a}{b}$ とが，$\dfrac{c}{d}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{a}{b}$ を満たす時，これらは F_{n+1} において $\dfrac{c}{d}, \dfrac{x}{y}, \dfrac{a}{b}$ の順番で並び，かつ $\dfrac{x}{y}=\dfrac{c+a}{d+b}$ の関係があることを示す。
②次に（＊＊）が成り立つことを示す。

＜証明＞
①（＊＊）の成立を仮定する。

どんな Q_{n+1} の要素 $\dfrac{x}{y}$ に対しても，F_n で隣り合わせている２つの既約分数 $\dfrac{c}{d}, \dfrac{a}{b}$ が存在して，$\dfrac{c}{d}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{a}{b}$ を満たしていることは明らかである。このとき，$\dfrac{x}{y}=\dfrac{c+a}{d+b}$ が成り立つ。

なぜなら，仮定より $\dfrac{c}{d}, \dfrac{a}{b}$ が F_n で隣り合わせていれば，$ad-bc=1$ が成り立つ。このとき（補題１）より，$\dfrac{c}{d}<\dfrac{p}{q}<\dfrac{a}{b}$ を満たす $\dfrac{p}{q}$ の中で分母の最も小さなものが $\dfrac{c+a}{d+b}$ である。よって，$y(=n+1)\geq d+b$ が成り立つ。一方，$\dfrac{c}{d}, \dfrac{a}{b}$ は F_n で隣り合わせているので，$\dfrac{c+a}{d+b}$ の分母について $d+b\geq n+1$ が成り立つ。ゆえに，$d+b=n+1$ となり，$\dfrac{c+a}{d+b}\in Q_{n+1}$ である。

次に $x'=c+a,\ y'=d+b,$ とおくと，$\dfrac{c}{d}, \dfrac{x'}{y'}$ に対し，$ad-bc=1$ だから，$x'd-cy'=(c+a)d-c(d+b)=ad-bc=1$ となり，$\dfrac{x'}{y'}, \dfrac{a}{b}$ に対し，
$a'y-bx'=a(d+b)-b(c+a)=ad-bc=1$ となる。

（補題２）より，$\dfrac{c}{d}, \dfrac{c+a}{d+b}, \dfrac{a}{b}$ は F_{n+1} で隣り合わせになり，この順番で並ぶ。$\therefore \dfrac{x}{y}=\dfrac{c+a}{d+b}$

（このことから，F_{n+1} 上で，Q_{n+1} の要素 $\dfrac{x}{y}$ の隣には必ず F_n の要素があり，Q_{n+1} の要素同士は隣り合わないことがわかる。）

② n についての帰納法で示す。つまり，
「$\dfrac{c}{d}, \dfrac{a}{b}$ ($\dfrac{c}{d}<\dfrac{a}{b}$ とする) が F_n で隣り合わせている
⇒ $ad-bc=1$」が成立することを仮定する。

この仮定の下で「F_{n+1} において隣り合わせている $\dfrac{c'}{d'}, \dfrac{a'}{b'}$ について $a'd'-b'c'=1$」を示せばよい。

ⅰ）$\dfrac{c'}{d'}, \dfrac{a'}{b'}$ がともに F_n の要素である場合は，$\dfrac{c'}{d'}, \dfrac{a'}{b'}$ は F_n でも隣り合わせているわけだから，仮定より自明である。

ⅱ）$\dfrac{c'}{d'}\in Q_{n+1}, \dfrac{a'}{b'}\in F_n$,のとき

①より，$\dfrac{c}{d}\in F_n$ があって，F_n 上で $\dfrac{c}{d}, \dfrac{a'}{b'}$ は隣り合わせており，$a'd-b'c=1$ が成り立つ。また，$\dfrac{c}{d}<\dfrac{c'}{d'}<\dfrac{a'}{b'}$，$\dfrac{c'}{d'}=\dfrac{c+a'}{d+b'}$

の関係がある。このとき，$a'd'-b'c'=$
$=a'(d+b')-b'(c+a')=a'd-b'c=1$ を満たしている。

ⅲ）$\dfrac{c'}{d'}\in F_n,\dfrac{a'}{b'}\in Q_{n+1}$,のときはⅱ）と同様。

ⅳ）$\dfrac{c'}{d'}\in Q_{n+1},\dfrac{a'}{b'}\in Q_{n+1}$ が起こらないことは①より明らかである。

以上より，（＊＊）が示せた。

①，②より，命題（＊）を示すことができた。

3．（負数）×（負数）＝（正数）について

算数・数学において，皆当たり前に使うことはできるが，「なぜ？」と問われた時，その説明が必ずしも容易ではない事柄は少なくない。よく持ち出される例は，分数の割り算において，「なぜ割る数の逆数をかけるのか？」という問題である。あるいは，「負数と負数の積がなぜ正数になるのか？」という質問である。それに対する，「こうすれば答えが出るのだから，理由など考えず，まず計算できるようになりなさい」という教師からの「指導」により，算数・数学が嫌いになった，という話もよく耳にするところである。

「習うより慣れろ」ということも，一面の真実ではあろうが，こうした「根源的な質問」に真正面から向き合うことも，大切なことである。ただし，ここで必要とされていることは，これらの疑問に「数学的にきちんとした説明や証明」を与えることでは，必ずしもない。（教師が「この問題を数学的にきちんと扱うとしたらどのようにすればよいのか」と自問することは，とても大切なことではあるが。）疑問を持った子どもが納得のいく説明，「なるほど！」という実感をもった理解を得ることのできる解説を与えることが，必要である。

そこで注意しなければならないのは，子どもの理解・納得の様式は一様でなく，ある子どもにとって，深く納得のいく説明でも，別の子どもにとっては腑に落ちない，ということがしばしば起こり得るということである。教師側にしてみれば，十分理を尽くして説明したにもかかわらず，「なぜこんな簡単なことがわからないのか？」といういらだちを感ずることがある。しかし，その子どもが全く別の角度からの説明に対して，驚くほどの理解を示す場面にもしばしば遭遇する。

つまり教師には，ある事柄に対する自分の理解の様式にとらわれずに，様々な角度からその事柄に対する説明や解説をすることのできる「引き出し」を用意しておくことが求められるのである。それはまた，扱っている算数・数学的な題材をより広く，深い数学的な見地から俯瞰し，再構成していく作業でもあると言える。

そうした観点から，先述の（負数）×（負数）＝（正数）の説明が初学者にとって一般にどのようになされているか，それらをより「納得のいく」事柄にしていくために，どのような切り口が可能であるのかをここで検討する。

(1) 中学教科書での説明

そもそも，正・負の数の概念を始めて学習するのは，中学１年の最初である。平成 18 年度用教科書，啓林館「未来へひろがる数学１」[6]を例にとってその説明の仕方を具体的に見てみよう。

そこでは，１節「正の数・負の数」で，０より小さい数としての負の数を導入し，２節「正の数・負の数の計算」で正負の数の加減乗除が説明される。

負の数の概念を導入するために，具体例として，温度計，土地の高低（海抜），家計の収入・支出，などが挙げられる。その次に，「ある地点から 2km 東の地点を＋2km で表すとき，3.5km 西の地点は－3.5km と表される」といったように，東西という向きをもった距離と正負の数を対応させることによって（実際には日常生活の上で，このような表現の仕方はしないのだが）数直線の概念を自然に定着させることが目指されている。

次に，正負の数の加法，大小関係を前提に，それらの乗法が次の順序で説明されていく。

ｉ）（正の数）×（正の数）

これは既知のものとして，例えば，

２×３＝２＋２＋２

と確認される。つまり，ここでは（かけられる数）×（かける数）という演算は（かけられる数）を（かける数）の個数だけ足すものとするという約束（定義）を確認するわけである。

ⅱ）（負の数）×（正の数）

これは，ｉ）と同様に与えることができて，例えば，

（－２）×３＝（－２）＋（－２）＋（－２）

と説明される。

ⅲ）（正の数）×（負の数）

今度はｉ），ⅱ）と同じようにはいかない[7]。なぜなら，かける数が負数である時，例えば２×（－３）において，２を（－３）個足すという演算は新しく定義しないと，意味を持たないからである。そこで，この教科書では，（正数）×（負数）という演算は，ｉ），ⅱ）とは別に扱って，次のように説明を加えている。

（＋２）×（＋３）＝＋６
（＋２）×（＋２）＝＋４
（＋２）×（＋１）＝＋２

を例示し，「かける数が正の数のときから考え，３，２，１と１ずつ小さくしていくと，積は２ずつ小さくなっていきます。そして，かける数が０のときには，（＋２）×０＝０となり，かける数をさらに１小さくした（＋２）×（－１）は，０より２小さく，―２であると考えられます。このようにしていくと，次のようになると考えられます。」として，

（＋２）×（－１）＝－２・・・－（２×１）

（＋２）×（－２）＝－４・・・－（２×２）
（＋２）×（－３）＝－６・・・－（２×３）

と帰納的に推測し,「正の数×負の数は，絶対値の積に負の符号をつけます」と結論づけている。

ⅳ）（負の数）×（負の数）

既にⅱ）で（負の数）×（正の数）を説明しているから，ⅲ）と同じような説明が可能になる。つまり，

（－２）×（＋３）＝－６
（－２）×（＋２）＝－４
（－２）×（＋１）＝－２

を見れば（－２）という負数にかける正数を１ずつ小さくしていくと，積は２ずつ大きくなっていくことがわかる。そのことからかける数を正数からゼロ，負数に拡張したときにも同じ法則に従うものと考えて，

（－２）×　　０＝　　０
（－２）×（－１）＝＋２
（－２）×（－２）＝＋４

という具合に推測し,「負の数×負の数は，絶対値の積に正の符号をつけます」と結論づけるのである。

以上が中学校の教科書でなされている説明の仕方であるが，ここで用いられているのは次の手法である。それは，負の数に積という演算を導入する際，正の数の積において成立している性質が保存されるように，定義するというものである[8]。これは数学において，ある概念をもともとの適用範囲より拡張して定義する際に，しばしば用いられる手法である。そして，この説明は直観的に大変わかり易いものであり，優れたものだと考えられる。しかし，先述したように，子どもの理解の様式は一様ではないので，他の「引き出し」を用意しておくことも重要である。

例えば，秋山は「マイナスどうしをたすとマイナスなのに，かけるとプラスになるのが不思議です。マイナスになるのではないですか」[9]と発問したうえで,「具体的なもので実感してみよう」として，次のような例を挙げている。

東西にのびている道路を考え，基準点を０とし，東へ測った距離を正で，西向きに測った距離を負で表すこととし，東向きの速さに正の符号，西向きの速さに負の符号をつけて表すものとする。また時間にも，現在から未来の時間に正の符号，現在から過去の時間に負の符号をつけて表すことにする。このような約束のもとに，

（速さ）×（時間）＝（距離）・・（＊）

という式がどのようになるかを次のように述べ,「マイナスどうしをかけるとプラスになる」という結論を下している。

例えば,（＋４）×（－３）＝－１２，という式を，東向きに４km/h の速さ（＋４km/h の速さ）で歩いている人が，今から３時間前，つまり，－３時間では西に１２km（－１２km）の所にいることになる，とする。そして,（－４）×（－３）＝＋１２，という式を，西向きに４km/h の速さ（－４km/h の速さ）で歩いている人が，今から３時間前，すなわち－３時間では東に１２km（＋１２km）の所にいることになる，と説明する。

この説明は,（＊）の式が成り立つように，速さの符号を決めただけで，堂々巡りしていると言えなくもない。しかし，先の教科書の説明には納得できなかったが，この説明ならよくわかる，と感じる子どももいるものと思われる。だから，この説明も一つの典型例として「引き出し」にしまっておいてよいだろう。

ここまで，負数の積について２つの典型的な説明の仕方を見てきた。これらの説明は子どもにとってわかり易い反面，何を出発点として，何を導いているのか，についてあいまいな点を残しているため，それらをきちんと再構成しておかないと，教師の側に混乱の生じる危険性がある。それゆえ，こうした点に関して，しっかりと整理しておく必要がある。

⑵ 負数同士の積の公理論的構成

ここでは，負数同士の積が正数になることは，証明され得るものだということを，必要最小限の前提から出発し，示すこととする。

その証明は，以下の２つの段階に分けて行う。

（Ⅰ）「どんな数 a,b に対しても， $a\cdot b=(-a)\cdot(-b)$ 」
・・・（＊）を示す。

（Ⅱ）「 $a<0,b<0\Rightarrow a\cdot b>0$ 」・・・（＊＊）を示す。

（Ⅰ）まず,（＊）を示すうえで，次の事柄を公理的前提とする。

数に和＋，積・が定義されていて，以下の①～⑤までを満たすものとする。

① $(a+b)+c=a+(b+c)$ （結合則）
② $a+b=b+a$ ②’ $a\cdot b=b\cdot a$ （交換則）
③ $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ （分配則）
④ 数 0 が存在して，任意の a に対して
$a+0=a$ が成り立つ （零元の存在）
⑤ 任意の数 a に対して，
$a+(-a)=0$ が成り立つ （逆元の存在）

以上を前提とすると，これらの規則のみを用いて，

「どんな数 a,b に対しても， $(-a)\cdot(-b)=ab$ 」・・・（＊）

の成り立つことを示すことができる。(以下では特にわかりにくい場合を除いてどれを用いているのかについて，断らないものとする）そのためには，いくつかの補題を示す必要がある。

（補題１）
　どんな数 a,b に対しても， $x+a=b$ を満たす数 x がただ一つだけ存在し， $x=b+(-a)$ である。
＜証明＞
　$x=b+(-a)$ とおくと，
$x+a=\{b+(-a)\}+a\ =b+\{(-a)+a\}\ =b+\{a+(-a)\}\ =b+0$
$=b$
よって， $x=b+(-a)$ は $x+a=b$ を満たしているから，
$x+a=b$ を満たす数 x は必ず存在する。
　逆に， $x+a=b$ を満たす数 x は,
$x=x+0\ =x+\{a+(-a)\}=(x+a)+(-a)\ =b+(-a)$ だから，
必ず $x=b+(-a)$ になる。
以上より， $x+a=b$ を満たす数 x がただ一つだけ存在し，
$x=b+(-a)$ である。　　　　（終）

（補題２） $a\cdot 0=0$ が任意の数 a に対して成り立つ
＜証明＞
③で $b=0,c=0$ とすると，
③の（右辺） $=a\cdot 0+a\cdot 0$
③の（左辺）＝ $a\cdot(0+0)\ =a\cdot 0$
　（$0+0=0$　は④で $a=0$ としたもの）
よって， $a\cdot 0+a\cdot 0=a\cdot 0$ ・・・（ⅰ）が成り立つ。
　一方，④で a を $a\cdot 0$ で置き換えると， $a\cdot 0+0=a\cdot 0$ となるから， $0+a\cdot 0=a\cdot 0$ ・・・（ⅱ）が成り立つ。
　（補題１）より， $x+a\cdot 0=a\cdot 0$ を満たす x は一意的で，（ⅰ），（ⅱ）より， $a\cdot 0$ および 0 はどちらもこの方程式を満たす。
　$\therefore\ a\cdot 0=0$　　　　　（終）

（補題３）
どんな数 a,b に対しても， $a\cdot(-b)=-a\cdot b$
＜証明＞
$a\cdot(-b)+a\cdot b=a\cdot\{(-b)+b\}=a\{b+(-b)\}=a\cdot 0\ =0$ ・・・（ⅲ）
　一方,
$(-a\cdot b)+a\cdot b=a\cdot b+(-a\cdot b)=0$ ・・・（ⅳ）
（補題１）より，　$x+a\cdot b=0$ を満たす x は一意的だが，（ⅲ），（ⅳ）より， $a\cdot(-b)$ 及び　$-a\cdot b$ はどちらもこの方程式を満たす。
　$\therefore a\cdot(-b)=-a\cdot b$　　　　（終）

　最後に，これらの補題を用いて（＊）を示す。

＜証明＞
$(-a)\cdot(-b)+(-a\cdot b)=(-a)\cdot(-b)+a\cdot(-b)$
$=(-b)\cdot(-a)+(-b)\cdot a\ =(-b)\{(-a)+a\}$
$=(-b)\{a+(-a)\}=(-b)\cdot 0=0$
以上より， $(-a)\cdot(-b)+(-a\cdot b)=0$ ・・・（ⅴ）
　一方，⑤で a を $a\cdot b$ で置き換えると
$a\cdot b+(-a\cdot b)=0$ ・・・（ⅵ）
（補題１）より，$x+(-a\cdot b)=0$ を満たす x は一意的だから，（ⅴ），（ⅵ）より，
「どんな数 a,b に対しても， $a\cdot b=(-a)\cdot(-b)$ 」・・・（＊）
の成立を示すことができた。

（Ⅱ）次に（＊＊）を示すうえで，以下の事柄を公理的前提とする。
　２つの数 a,b に対する関係 $a<b$ が定義されていて，以下の⑥，⑦を満たすものとする。

⑥　$a<b$ ならば，どんな c に対しても， $a+c<b+c$ が成り立つ。
⑦　$a>0,b>0\Rightarrow a\cdot b>0$

　これらの規則および（＊）のみを用いて，

「 $a<0,b<0\Rightarrow a\cdot b>0$ 」・・・（＊＊）

の成立を証明することができる。

　そのためにまず， $a<0\Rightarrow -a>0$ ・・・（ⅶ）を示す。
　$0>a$ の両辺に $-a$ を加えると，⑥より
$0+(-a)>a+(-a)$　　$\therefore$　$-a>0$ となり，（ⅶ）が示せた。

　最後に，以上のことを用いて（＊＊）を示す。
　$a<0,b<0$ とするとき，（ⅶ）より， $-a>0,-b>0$ である。
$\therefore$ ⑦より， $(-a)\cdot(-b)>0$ が成り立つ。
一方，（＊）より， $(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$ だから， $a\cdot b>0$ である。
　以上より，「 $a<0,b<0\Rightarrow a\cdot b>0$ 」・・・（＊＊）を示すことができた。

　以上のように，数に和＋，積・という演算，および大小関係 $a<b$ が定義されているものとし，それらに①～⑤および⑥，⑦という性質が成立しているものと仮定すれば，負数と負数の積が正数になることは，証明されるべきものであることがわかった。
　しかし，先述の中学教科書の説明では，それは定義されたものであった。それらは，どのような関係にあるのか，検討してみよう。中学教科書での扱いは，次のような構造になっている。
　負数と正数および負数同士の積を以下のように定義する[10]。
$a>0,b>0$ として，
$(-a)\cdot b=-a\cdot b\cdots(\alpha)$
$$\begin{cases} a\cdot(-b)=-a\cdot b\cdots(\beta) \\ (-a)\cdot(-b)=a\cdot b\cdots(\gamma) \end{cases}$$
　そうすると，上に述べてきた証明とは逆に，この定義と正数での分配則 $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\cdots(\omega)$ を仮定すること

により，a,b,c のいずれか，あるいはすべてが負数であるときにも，分配則の成立を示すことができる。上述の定義（α），（β），（γ），正数での分配則（ω），及び，先に挙げた公理的前提の①，②，④，⑤のみを用いてこのことを示してみよう。

そのために，まず次の補題を示す。

（補題４）どんな数 a についても，$-(-a)=a$
（補題５）$a>0,c<0$ のときにも，$a\cdot(-c)=-a\cdot c$ が成り立つ。
（補題６）$c<0,d<0$ のときにも，$(-c)\cdot(-d)=c\cdot d$ が成り立つ。
（補題７）$c<0$ のとき，e を任意の数として，$(-c)\cdot e=-c\cdot e$ が成り立つ。

＜証明＞
（補題４）
⑤ $a+(-a)=0$ で（補題１）を用いると，
$a=0+\{-(-a)\}=-(-a)$

（補題５）
定義（β）で $-b<0$ より，$c<0$ を用いて，$-b=c$ とおける。
このとき，（β）は，$a\cdot c=-a\cdot(-c)$ とかけるが，これより，$-a\cdot c=-\{-a\cdot(-c)\}$ であり，（補題４）より，（右辺）$=a\cdot(-c)$

（補題６）
定義（γ）において，$-a<0,-b<0$ より，$c<0,d<0$ を用いて，$a=-c,\ -b=d$ （（補題４）より $-a=c,b=-d$ でもある）とおくことができて，$c\cdot d=(-c)\cdot(-d)$

（補題７）
まず，$e>0$ のときについて示す。
定義（α）で，$-a<0$ より，$c<0$ を用いて，$-a=c$ （（補題４）より，$a=-c$ でもある）とおける。
このとき（α）は，$c\cdot b=-(-c)\cdot b$ とかけるが，（補題４）より，$-c\cdot b=-\{-(-c)\cdot b\}=(-c)\cdot b$ なので，$e>0$ のときを示せた。
次に，$e<0$ のときについて示す。
定義（β）で，（補題６）と全く同様に c,d を置くことができて，$(-c)\cdot d=-(-c)\cdot(-d)$ となる。（補題６）より，$(-c)\cdot(-d)=c\cdot d$ だから，$(-c)\cdot d=-c\cdot d$ なので，$e<0$ のときを示せた。
以上より，$c<0$ のとき，e を任意の数として，$(-c)\cdot e=-c\cdot e$ が成り立つ。

次に，分配則 $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ について，いくつかの場合分けを行って，順を追って証明する。

（♯）$a>0,b>0,c<0$ の場合について示す。
1.　$b+c>0$ のとき
$a\cdot(b+c)=a\cdot(b+c)+(-a\cdot c)+a\cdot c$ だが，（補題５）より，
$=a\cdot(b+c)+a\cdot(-c)+a\cdot c$
ここで，$b+c>0,-c>0$ より，（ω）が適用できて，
$a\cdot(b+c)+a\cdot(-c)+a\cdot c=a\{(b+c)+(-c)\}+a\cdot c=a\cdot b+a\cdot c$

2.　$b+c=0$ のとき
（補題１）から，$c=-b$
$a\cdot(b+c)=a\cdot 0=0$
一方，$a\cdot b+a\cdot c=a\cdot b+a\cdot(-b)$ だが，（β）より
$a\cdot(-b)=-a\cdot b$ だから，$a\cdot b+a\cdot(-b)=a\cdot b+(-a\cdot b)=0$
$\therefore a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

3.　$b+c<0$ のとき
$a\cdot\{(-c)+(b+c)\}=a\cdot b$
一方，$-c>0,b+c<0,(-c)+(b+c)=b>0$ より，上記１.から
（左辺）$=a\cdot(-c)+a\cdot(b+c)$ だが，（補題５）より，
$a\cdot(-c)=-a\cdot c$
だから，（左辺）$=-a\cdot c+a\cdot(b+c)$
よって，$-a\cdot c+a\cdot(b+c)=a\cdot b$ が成り立つから，（補題１）より，$a\cdot(b+c)=a\cdot b+\{-(-a\cdot c)\}$
（補題４）より，$-(-a\cdot c)=a\cdot c$ だから，
$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

以上で，$a>0,b>0,c<0$ の場合に $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ の成立が示せた。

（♯♯）$a>0,b<0,c<0$ の場合について示す。
$a\cdot c=a\cdot\{(-b)+(b+c)\}$ だが，$-b>0,b+c<0$ より，（♯）が適用できて，$a\cdot\{(-b)+(b+c)\}=a\cdot(-b)+a\cdot(b+c)$
（補題５）より，　$=-a\cdot b+a(b+c)$
よって，（補題１）より，$a\cdot(b+c)=a\cdot c+\{-(-a\cdot b)\}$
（補題４）より，　$=a\cdot c+a\cdot b$

（♯♯♯）$a<0$ （b,c は任意の数）の場合について示す。
（補題７）より，$(-a)\cdot(b+c)=-a\cdot(b+c)$ だから，
$a\cdot(b+c)+(-a)\cdot(b+c)=a\cdot(b+c)+\{-a\cdot(b+c)\}=0$
ここで，$-a>0$ より，（♯）（♯♯）より，
$(-a)\cdot(b+c)=(-a)\cdot b+(-a)\cdot c$ だが，（補題７）より，
$=(-a\cdot b)+(-a\cdot c)$
よって，　$a\cdot(b+c)+(-a\cdot b)+(-a\cdot c)=0$
（補題１）および（補題４）より，$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

（♯），（♯♯），（♯♯♯）より，負数を含む，数全体で分配則の成立を示すことができた。

また，この分配則の成立を示すうえで，交換則②’は一切用いていない。(②は繰り返し用いたが）実は，（α）～（γ）を定義し，正数での交換則②’を仮定すると，やはり交換則が数全体で成立する。次にこれを示そう。

$a>0, b>0$ として，

$(-a)\cdot b=-a\cdot b=-b\cdot a=b\cdot(-a)$

$(-a)\cdot(-b)=a\cdot b=b\cdot a=(-b)\cdot(-a)$

ここまで見てきたように，積に（α）～（γ）を定義し，積に関しての性質である，交換則②’，分配則③が正数で成り立つことを仮定すれば，②’，③が負数を含む数全体で成り立つことを証明できるのである。つまり，証明された事柄を定義として出発して，もとの証明で仮定した公理的前提の一部を逆に証明できたわけである。

中学教科書の説明を，きちんと再構成すると，このようなことが得られる。

(3) 複素数平面を用いた説明

これまで負数の積について論じてきたわけだが，言うまでもなく，正負とは実数にのみ入る概念である。換言すれば，実数には大小関係を入れることができるから，数０との大小を比較することが可能となり，０より大きい数を正の数，０より小さい数を負の数と呼んでいるわけである。

ところが，扱う数の範囲を実数にのみ限定せずに，正負の概念の入らない虚数を含む複素数まで拡張して考えると,「負数の積が正数になる」ということに対してより一般的で自然な理解が得られる。最後にこの逆説的だが説得力のある方法による解説を述べよう。

ⅰ）虚数単位 i ・複素数の定義

x の２次方程式　$x^2=-1$ の解を $\pm i$ と約束し，i を虚数単位と呼ぶ。

実数 a,b 及び虚数単位 i を用いて作られる $a+bi$ という数を複素数と呼び，その四則演算については，$i^2=-1$ を除いて，実数のそれと同じものとする。

（例１）

① $(2+3i)+(5-4i)=7-i$

② $(2+3i)(5-4i)=10+7i-12i^2=10+7i-12(-1)=22+7i$

ⅱ）複素数の図示

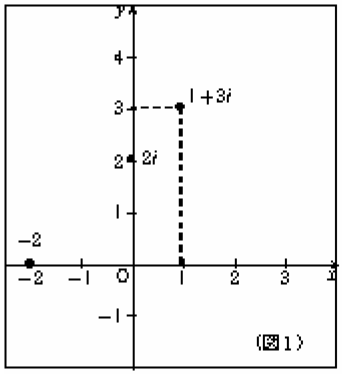
例えば，２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは xy 平面において放物線として図示される。そこでの座標 (x,y) は実数であり，虚数の入る余地はない。だから，通常の xy 平面に複素数を図示することはできない。

そこで，新たに複素数平面というものを次のように定義する。複素数 $a+bi$ に対し，xy 平面上の点 (a,b) を対応させる。それゆえ，x 軸を実軸，y 軸を虚軸と呼ぶ。

（例２）

$1+3i$，$2i$，-2 の図示

これらの複素数は次のように図示される。



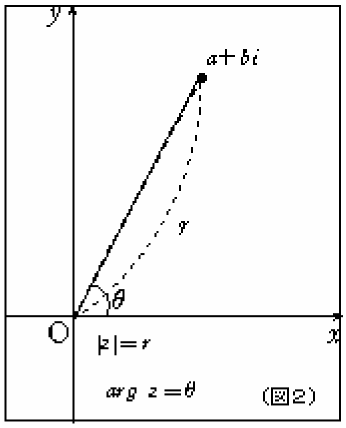
(図1)

このとき，複素数 z を変数とする関数 $f(z)$ を考え，$w=f(z)$ のグラフを複素数平面上にかくことはできないことに注意しなければならない。

ⅲ）複素数の極形式での表現

このように，複素数平面上に複素数をかくことができれば，複素数 $z=a+bi$ に極形式いう別の表現を与えることが可能になる。それは次のようにすればよい。

与えられた複素数 z を複素数平面上に図示し，その点と原点とを結ぶ。z の絶対値 $|z|$ をその２点間の距離と決める。そして，z の偏角 $\arg z$（argument　z と読む）をその線分と実軸のなす角で定義する[11]。



(図2)

$$|z|=r=\sqrt{a^2+b^2},\ \cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

の関係があるから,

$$z=a+bi=\sqrt{a^2+b^2}\times\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right)$$

$=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta+i\sin\theta)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ と表すことができる。

つまり，複素数 $z=a+bi$ をその絶対値 r および偏角の値 θ で表すことができるのである。

ⅳ）２つの複素数の積

２つの複素数

$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ および $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ が与えられたとき，その積 z_1z_2 はどのように表せるであろうか。結果は次の通りである。

$z=z_1z_2, |z|=r, \arg z=\theta$ とおくと，r,θ と r_1,r_2 および θ_1,θ_2 との間に次のような関係が成り立つ。

$r=r_1r_2$，$\theta=\theta_1+\theta_2$ ・・・（＊）

以下でこれを示そう。

＜証明＞

$z=z_1z_2=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\ r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

ここで，偏角部分の積だけ取り出して計算すると，

$(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)$

$=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)$ となるから，結局

$z_1z_2=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$ となり，

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ と比較すると，

$r=r_1r_2$，$\theta=\theta_1+\theta_2$ ・・・（＊）が得られる。

ⅴ）２つの複素数の積の図形的意味

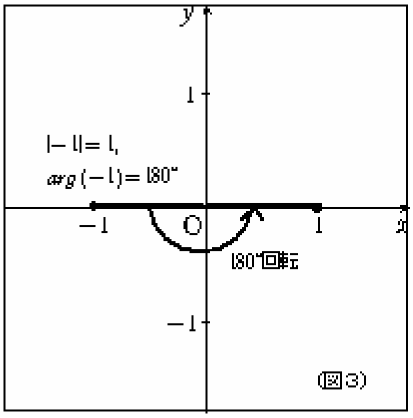
２つの複素数 z_1,z_2 の積をとることを，z_1 に z_2 をかける操作として眺めてみると，上に得られた（＊）は次のような解釈を可能とする。z_1 に z_2 をかけて新しい複素数 z を作る操作とは，z_1 の絶対値 r_1 を r_2 倍し，z_1 の偏角 θ_1 をさらに θ_2 回転させるということである。つまり，複素数においてかけ算をするということは，複素数平面上で相似変換（拡大縮小）と回転変換を施すということに他ならない。これがどんな２つの複素数の積においても貫かれる図形的意味である。

ⅵ）（負数）×（負数）＝（正数）の説明

以上のように，複素数の積が複素数平面上で持つ図形的意味を捉えてみると，負数同士の積が正数になることも，その法則の一例として，極めて自然に理解することができる。

最も簡単な例として，$(-1)\times(-1)$ を取り上げてみよう。

$|-1|=1$，$\arg(-1)=180°$ である。つまり，(-1) に，(-1) をかけるということは，(-1) の絶対値１を１倍し，(-1) の偏角 $180°$ をさらに $180°$ 回転させる操作を施すことである。そうすると，得られる積 $(-1)\times(-1)$ の絶対値は 1，偏角は $360°$ ということになる。それは複素数 1 である。



(図3)

他の例で考えても，まったく同様に，負数に負数をかけた時に得られる数の偏角はすべて $360°$ になるわけだから，必ず正数になることがわかる。

４．おわりに

2010 年 11 月 20 日に武庫川女子大学大学院で大学院生および学部生を対象に，この研究ノートを下敷きに「算数・数学の面白さー解けること・わかること・面白いと思うことー」というテーマのセミナーを持つ機会を得た。教師志望の学生を前に，実際にこの研究ノートをどのように用いたかということを簡単に記して，まとめに代えたい。

ⅰ）ファレイ数列に関して

最初にホワイトボードに１本の長い数直線を準備し，その上に F_1，F_2，F_3，F_4，F_5 程度を順番に書き出し（その際，口頭で補うことができるため，補助的な数列 Q_k は導入しなかった），その作り方を説明することで，F_n の定義に代えた。F_5 を書き終えた後で，２つの正の分数 $\frac{c}{d},\frac{a}{b}$ の大小関係を調べるには，必ずしも通分する必要はなく，$\frac{c}{d}<\frac{a}{b}\Leftrightarrow bc<ad$ を利用することを述べておいた。続いて Q_6，Q_7，Q_8，Q_9 を，順番にその数直線上に書き足すよう学生を指名し，指名されていない学生には，できる限り大きい n まで F_n を作るように指示した。

F_9 位になると，人前で計算する緊張もあって，なかなか作業が進まない。頃合いを見て，座席に戻ってもらい，ホワイトボード上で，まだ埋まっていない数列の項をかなり早いスピードで埋めていき，一気に F_{11} 位まで進める。その作業を学生によく見てもらうと，実はこの作業においては，$\frac{c}{d}<\frac{a}{b}\Leftrightarrow bc<ad$ の計算をまったく経ずに数列を記入していることに気づく人が出てくる。そして，Q_{n+1} の要素 $\frac{x}{y}$（$y=n+1$）を書き込むときに，F_n の隣り合わせの要素 $\frac{c}{d},\frac{a}{b}$ で $x=c+a, y=d+b$ になるものを探して，その間に

$\frac{x}{y}$ を挿入していることに気づく人が出てくる。その数がだいぶん増えてきたところで，この規則性に気づいた人に，それを述べてもらうと，いちいち $\frac{c}{d} < \frac{a}{b} \Leftrightarrow bc < ad$ の計算を行って，数列を書き足す作業の繁雑さに頭を悩ましていた参加者から感嘆の声が漏れた。

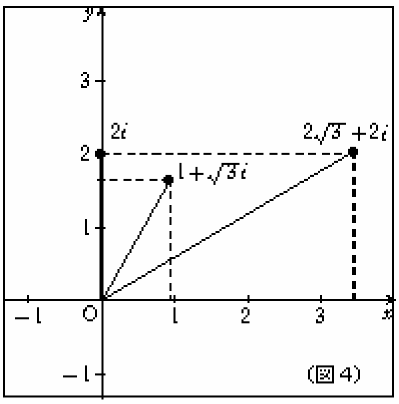
ここでは，本ノートに示した証明は敢えて与えなかった。帰納的にその性質を示すだけでも，その面白さは理解されるはずだ，という予想は十分実証されたものと思われる。

ⅱ）（負数）×（負数）＝（正数）に関して

最初に中学校の教科書の記述などについて紹介したが，公理論的な証明については，そのようなことが可能であることだけ，示唆し詳しくは触れなかった。

次に複素数平面を用いた説明について，時間をとって詳しく行った。２つの複素数の積が図形的には相似変換と回転変換とに対応していることを一般的に証明することはせず，具体的な例でそれを示した。

そのために，$z_1 = 2\sqrt{3} + 2i$，$z_2 = 1 + \sqrt{3}i$，$z_3 = 2i$ という３つの複素数を用意した。



そして，$|z_1| = 4$，$\arg z_1 = 30°$，$|z_2| = 2$，$\arg z_2 = 60°$，$|z_3| = 2$，$\arg z_3 = 90°$，を求める。

そして，これらを用いて以下のことを示した。

$z_1 = 2\sqrt{3} + 2i$ と $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ との積を計算し，$z_1 z_2 = 8i$ を得る。すると，$|z_1 z_2| = |8i| = 8$，$\arg z_1 z_2 = \arg 8i = 90°$

一方 $|z_1||z_2| = 4 \cdot 2 = 8$，$\arg z_1 + \arg z_2 = 30° + 60° = 90°$ だから，$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$，$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$ の成立を確認することができる。

また，$z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ と $z_3 = 2i$ の積を計算し，$z_2 z_3 = -2\sqrt{3} + 2i$ を得る。すると，

$|z_2 z_3| = |-2\sqrt{3} + 2i| = 4$，$\arg z_2 z_3 = \arg(-2\sqrt{3} + 2i) = 150°$

一方 $|z_2||z_3| = 2 \cdot 2 = 4$，$\arg z_2 + \arg z_3 = 60° + 90° = 150°$ だから，$|z_2 z_3| = |z_2||z_3|$，$\arg z_2 z_3 = \arg z_2 + \arg z_3$ の成立を確認することができる。（少し時間を取って，以上の計算を参加者にもしてもらった。複素数平面という話題を耳にするのは初めてである人が多かったにもかかわらず，予想以上に皆良く手が動いて，殆どの人が正答を得ていたようだった。）

この２例より，複素数平面上の２数の積の図形的意味を説明した。もちろん，証明にはなっていないが，本質を直観的につかむにはこれで十分であろう。

こうした例示を経て，複素数平面上での２数の積の図形的意味から，（負数）×（負数）＝（正数）を自然なものとして理解できることを説明した。こちらの方は，少しストーリーが長かったためか，残念ながらファレイ数列に対してのようなストレートな感動を得ることはできなかった。しかし，参加者の中から初等的な題材であっても，より掘り下げていくと，その中に隠された様々な数学的な構造を垣間見ることができることへの，驚きの声を聞くこともできた。

－注－

1　筒井勝美，西村和雄，松田良一『どうする「理数力」崩壊』PHP 研究所，2004，p.102.　ここでは，国立教育政策研究所の調査によれば，数学を「大好き」，「好き」とする中学２年生の割合は，1999 年において日本が 48％であり，シンガポール（79％），アメリカ合衆国（69％）などと比べて大幅に少ない結果がでていることが指摘されている。

2　三浦展『下流社会　新たな階層集団の出現』光文社，2005，p.7.

3　Andrew John Wiles (1953-　) イギリスの数学者

4　Pierre de Fermat (1601-1665) フランスの数学者

5　筒井勝美，西村和雄，松田良一『どうする「理数力」崩壊』PHP 研究所，2004，pp.93-94.

6　岡本和夫他 43 名『未来へひろがる数学１』新興出版社啓林館，2005，pp.8-29.

7　交換則を仮定すれば，ⅲ）はⅱ）から導けるが，導入時には，まず負数の積を定義してから，交換則を導くのが通常であろう。

8 負数の積をこのように定義すれば，負数を含む数全体で分配則という性質を保存することができる。

例えば，$(+2)\times(-2)$ と $(+2)\times(-3)$ とを比べて，かける数を１小さくすると，積が２小さくなる，ということをきちんと述べれば次のようになる。

$(+2)\times(-3)=(+2)\times\{(-2)+(-1)\}$ だが，負数も含めて分配則が成立しているとすると，(与式) ＝ $(+2)\times(-2)+(+2)\times(-1)$ となり，定義より $(+2)\times(-1)=-2\times1$ だから，

$(+2)\times(-3)=(+2)\times(-2)-2$ を導くことができる。

9 秋山仁監修，都数研・不思議議調査班編『秋山仁と算数・数学不思議探検隊』森北出版，1994，pp.54-55.

10 （α）は正数に正数をかける演算の，数に正数をかける演算への自然な拡張となっている。（β），（γ）は分配則が負数を含む数全体で成立するためのものである。

11 $\arg z$ には，360° の整数倍の任意性があるから，通常これを 0° から 360° の値に限定して議論する。

－参考文献－

高木貞治『初等整数論講義』共立出版，1971 年
佐武一郎『線型代数学』裳華房，1985 年
一松信『複素数と複素数平面』森北出版，1993 年